القياس: هو نوع خاص من دوال المجموعات

دالة المجموعة: لتكن X مجموعة غير خالية ولتكن H جبراً جزئياً من 2^X

كل دالة من الشكل $\mu : H \to [-\infty, \infty]$

$A \to \mu(A)$

دالة مجموعة (أو دالة المجموعات)

نقول عن الدالة μ

(1) موجبة إذا كان $\mu(A) \geq 0 \; \forall A \in H$

(2) نصف جمعية إذا حققت ما يلي

إذا كانت $A_1, A_2, \dots, A_n \in H$ بحيث $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in H$ فإن $\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$

وتسمى أيضاً دالة تحت جمعية

(3) جمعية إذا حققت ما يلي: إذا كانت $A_1, A_2, \dots, A_n \in H$ منفصلة مثنى مثنى وكان $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in H$ فإن $\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$

« تسمى أيضاً جمعية تامة »

(4) σ- جمعية (جمعية تامة) إذا حققت ما يلي:

إذا كانت $A_1, A_2, \dots \in H$ منفصلة مثنى مثنى وكان $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in H$ فإن:

$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

(5) σ- نصف جمعية (تحت الجمعية التامة)

إذا كانت $A_1, A_2, \dots \in H$ وكان $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in H$ فإن

$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

(6) مطردة إذا كانت حققت ما يلي

إذا كان $A, B \in H$ بحيث $A \subset B$ فإن

$\mu(A) \leq \mu(B)$

(7) منتهية إذا كان $\mu(A) < +\infty \; \forall A \in H$

(8) منتظمة إذا كان $\mu(X) = 1$

(9) σ- منتهية إذا وجدت مجموعات

$A_1, A_2, \dots, A_n \in H$ منفصلة مثنى مثنى بحيث أن

$X \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $\mu(A_i) < \infty$

(10) طرحية إذا حققت ما يلي:
إذا كانت $A, B \in H$ و $B/A \in H$ و $A \subset B$ و $\mu(A) < \infty$
ينتج أن $\mu(B/A) = \mu(B) = \mu(A)$

(11) تامة إذا حققت ما يلي:
إذا كان $B \in H$ و $A \subset B$ و $\mu(B) = 0$ ينتج أن $A \in H$

مجموعة الأعداد الحقيقية الموسعة:
لتكن $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ مجموعة الأعداد الحقيقية ولنضف إليها الرمزين $(+\infty)$ ، $(-\infty)$ فنحصل على ما يسمى بمجموعة الأعداد الحقيقية الموسعة.

$$\bar{\mathbb{R}} =]-\infty, +\infty[\cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$$

بناءً على ذلك يجب توسيع عمليات الضرب والجمع بالمجموعة الجديدة حيث نضع

(أ) - إذا كان $a \in \mathbb{R}$ ، $a > 0$.

$$a.(+\infty) = +\infty$$
$$a.(-\infty) = -\infty$$

• إذا كان $a < 0$

$$a.(+\infty) = -\infty$$
$$a.(-\infty) = +\infty$$

(ب) إذا كان $a \in \mathbb{R}$ نضع

$$a + \infty = +\infty + a = +\infty - a = +\infty$$
$$a - \infty = -\infty + a = -\infty - a = -\infty$$

(ج) إذا كان $a = 0$ نضع

$$a.(+\infty) = 0 \,,\, a.(-\infty) = 0$$

(د) العمليات على الرمزين $(+\infty)$ ، $(-\infty)$

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$$
$$(-\infty) + (+\infty) = -\infty$$
$$(+\infty).(+\infty) = +\infty$$

$(-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$

$(+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$

$(-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty$

(٤) العبارات التالية غير معرفة .

$(+\infty)-(+\infty) = ?$

$(-\infty)-(-\infty) = ?$

لذلك ولتجنب عبارات من هذا النوع سنأخذ دوال مجموعات من الشكل

$$M : H \to]-\infty, +\infty]$$

$$A \to M(A)$$

علماً انه في بعض الكتب يوجد عبارات ذات الشكل

$$M : H \to [-\infty, +\infty[$$

القياس :

لتكن X مجموعة غير خالية و 2^X صف كل المجموعات الجزئية من X ولتكن الصف $H \subset 2^X$

تعريف القياس

نسمي دالة المجموعات معرفة على صف H

$$M : H \to]-\infty, +\infty]$$

$$A \to M(A)$$

وتحقق ما يلي

(١) $M(\emptyset) = 0$

(٢) $M(A) \geq 0 \quad ; \forall A \in H$

أي ان M دالة موجبة

(٣) إذا كانت $A_1, A_2, \ldots \in H$ وكان $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in H$

فإن منفصلة مثنى مثنى

$$M\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} M(A_i)$$

(أي ان القياس M هو دالة σ - جمعية تامة)

ملاحظة : الصف H قد يكون حلقة أو σ حلقة أو جبر أو σ جبر أو δ حلقة

أو غير ذلك

مبرهنة: ليكن $\mu: \mathcal{R} \to [0, +\infty]$ قياساً على الحلقة $\mathcal{R}$ عندئذ يكون:

(1) μ دالة مطردة على $\mathcal{R}$

(2) μ دالة فرعية

(3) إذا كانت $A, B \in \mathcal{R}$ وكانت إحدى القيمتين $\mu(A)$ أو $\mu(B)$ منتهية فيكون

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

وبشكل خاص إذا كان $A \cap B = \emptyset$ فإن $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

(4) إذا كانت $B, A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{R}$ وكانت $B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ فإن $\mu(B) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

(5) μ دالة … تحت جمعية

(6) μ دالة متممة

نتيجة: إذا كانت $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{R}$ منفصلة مثنى مثنى فإن $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

تعريف: نقول عن القياس $\mu: H \to [-\infty, +\infty]$ إنه:

(1) منته إذا كان $|\mu(A)| < +\infty, \forall A \in H$

وبشكل خاص إذا كان $X \in H$ فيكون القياس منته إذا كان $|\mu(X)| < +\infty$

(2) احتمالي (أو قياس احتمالي) إذا كان $\mu(X) = 1$

(3) σ-منته إذا وجدت مجموعات $A_1, A_2, \dots \in H$ منفصلة مثنى مثنى بحيث يكون $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ، $|\mu(A_i)| < +\infty$

(4) غير منته إذا لم يكن منته أو σ-منته.

أمثلة عن القياسات: [illegible]

(1) القياس الصفري $\mu: H \to [-\infty, +\infty]$

$A \to \mu(A) = 0$

الإثبات: 1- $\mu(\emptyset) = 0$

2- $\mu(A) = 0 \geq 0$ وذلك $\forall A \in H$

3- لتكن $A_1, A_2, \dots \in H$ منفصلة مثنى مثنى، $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in H$

عندئذ يكون لدينا ما يلي:

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = 0 = \sum_{i=1}^{\infty} 0 = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

إذاً μ قياس على H وهو قياس منته.

(٤) قياس العد : $M: H \to [0, \infty]$

$A \mapsto M(A)$

عدد عناصر مجموعة A إذا كانت A منتهية $A \to M(A) = |A|$

إذا كانت A مجموعة غير منتهية ∞

ولنثبت أن M قياس على H (١) لدينا $M(\emptyset) = 0$ لأن المجموعة الخالية منتهية وعدد عناصرها صفر $M(\emptyset) = |\emptyset| = 0$

(٢) واضح أن $M(A) \geq 0, \forall A \in H$

(٣) لتكن $A_1, A_2, \ldots \in H$ منفصلة مثنى مثنى و $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in H$

وعلينا إثبات العلاقة * $M(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} M(A_i)$ *

وهناك عدة الحالات التالية

(أ) إحدى المجموعات A_i غير منتهية لذلك يكون $M(A_i) = +\infty$ ولا يكون أيضاً $(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$ مجموعة منتهية وبالتالي $M(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = +\infty = \sum_{i=1}^{\infty} M(A_i)$

أي أن المساواة (*) محققة

(ب) المجموعة $(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$ غير منتهية في هذه الحالة يوجد عدد لانهائي من المجموعات A_i غير خالية ولنرمز لها $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots$ أي أنه يوجد في A عنصر واحد على الأقل لذلك يكون

$M(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = +\infty = M(A_{i_1}) + M(A_{i_2}) + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} M(A_i)$ غير منتهية

إذاً (*) محققة أيضاً.

(ج) المجموعة $(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$ منتهية في هذه الحالة يوجد عدد منته من المجموعات غير الخالية وجميعها منتهية ولنسمها $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ حيث k عدد محدود أو منته . وهنا يكون $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{j=1}^{k} A_{i_j}$

وبالتالي $M(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = M(\bigcup_{j=1}^{k} A_{i_j}) = \sum_{j=1}^{k} M(A_{i_j})$

$= \sum_{j=1}^{k} M(A_{i_j}) + 0 = \sum_{j=1}^{k} M(A_{i_j}) + \sum_{i \neq i_j} M(A_i)$

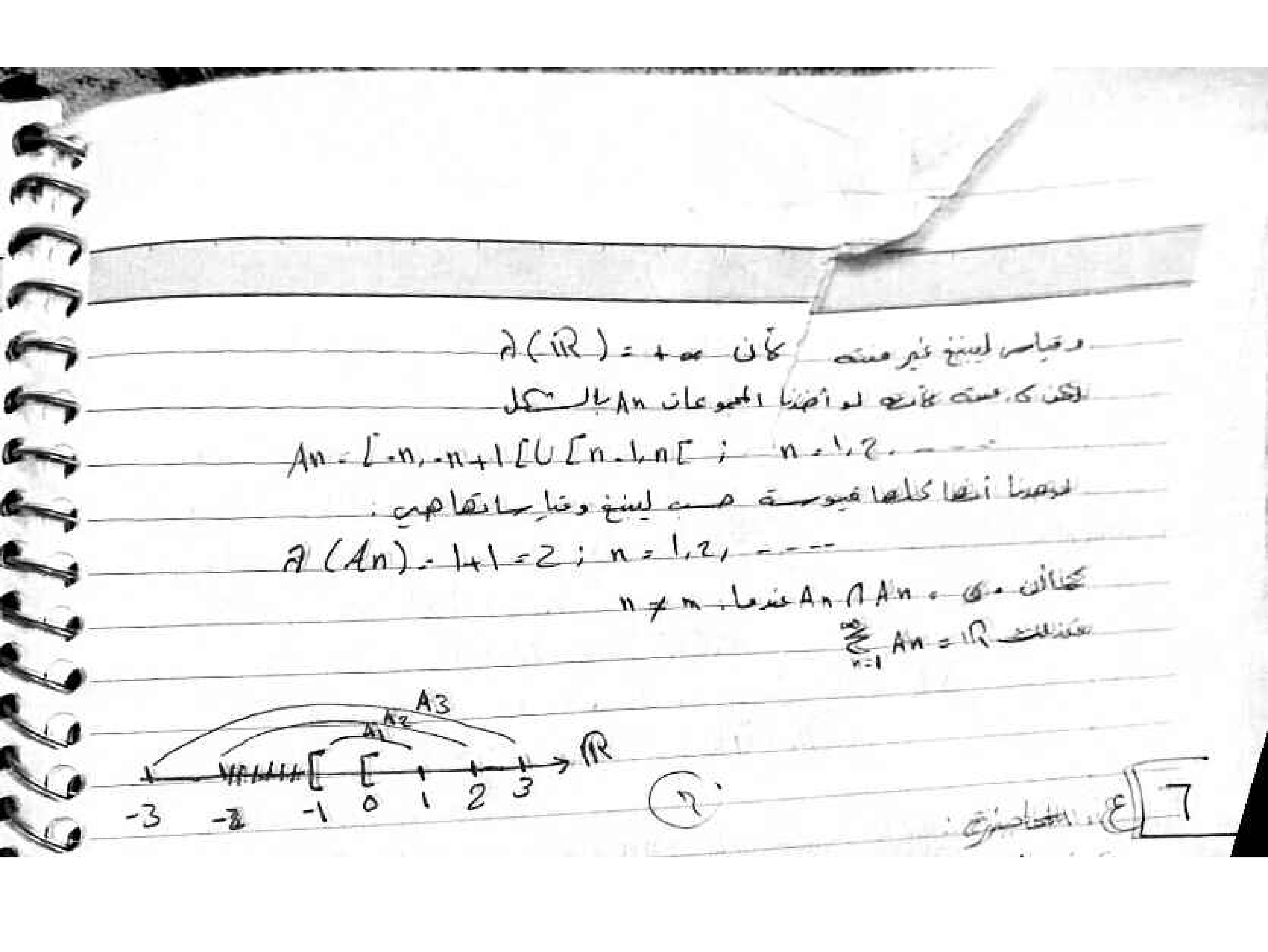
$= \sum_{i=1}^{\infty} M(A_i)$

أي أن (*) محققة أي أن M قياس (يقرن كل مجموعة بعدد عناصرها)

وهذا القياس قد يكون منتهياً أو σ-منته أو غير منته كما في الأمثلة اللاحقة.

(٥) قياس لبيغ :

سندرسه لاحقاً بالتفصيل وهو يعمم مفهوم الطول ويكون قياس لبيغ لكل مجال (مفتوح أو مغلق أو نصف مفتوح) هو طول المجال



وقياس ليبيغ غير منته لأن $\lambda(\mathbb{R}) = +\infty$

لكنه σ-منته لأنه لو أخذنا المجموعات A_n بالشكل

$$A_n = [-n, -n+1[\cup [n-1, n[\; ; \; n = 1, 2, \dots$$

لوجدنا أنها كلها مقيوسة حسب ليبيغ وقياسها منتهي:

$$\lambda(A_n) = 1 + 1 = 2 \; ; \; n = 1, 2, \dots$$

كما أن $A_n \cap A_m = \emptyset$ عندما $n \neq m$

كذلك $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{R}$

ع. المحاضرة: 6